УДК 330.43 **DOI: 10.37332/2309-1533.2023.1.22**
JEL Classification: C12, C52

Єрьоменко В.О.,
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
доцент кафедри прикладної математики,
Алілуйко А.М.,
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
доцент кафедри прикладної математики,
Домбровський І.В.,
викладач кафедри прикладної математики
Західноукраїнський національний університет, м. Тернопіль

ДОСЛІДЖЕННЯ РЕГРЕСІЙНИХ МОДЕЛЕЙ БЕЗ ВІЛЬНОГО ЧЛЕНА

Yeromenko V.O.,
cand.sc.(phys.-math.), assoc. prof.,
assoc. prof. at the department of application mathematics,
Aliluiko A.M.,
cand.sc.(phys.-math.), assoc. prof.,
assoc. prof.at the department of application mathematics,
Dombrovskyi I.V.,
lecturer at the department of application mathematics
West Ukrainian National University, Ternopil

STUDY OF REGRESSION MODELS WITHOUT A FREE TERM

Постановка проблеми. Одним із найпоширеніших інструментів дослідження соціально-економічних систем і процесів є кореляційно-регресійний аналіз. Однак навіть у випадку лінійних багатофакторних моделей дослідник зустрічається з різними проблемами: гетероскедастичність і автокореляція залишків в узагальненій лінійній моделі, а також явище мультиколінеарності. Ще одна проблема – відсутність вільного члена в теоретичній моделі, що призводить до того, що сума залишків в емпіричній моделі, як правило, не дорівнює нулю. В цьому випадку коефіцієнт множинної детермінації перестає бути задовільною мірою якості моделі. В загальному випадку він може виходити навіть за межі проміжка [0; 1]. А тому статистики, обчислені за стандартними формулами метода найменших квадратів, втрачають коректність.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Приклади випадків регресійних моделей без вільного члена: гіпотеза неперервного (постійного) прибутку Мілтона Фрідмана; в теорії аналізу витрат; у монетаристській теорії [1]. В статті [2] наведена бібілографія ([3-8]) робіт, в яких задачі з різних галузей зводяться до лінійних множинних регресій без вільного члена. Крім того, зустрічається ситуація, коли у вихідній моделі вільний член відмінний від нуля, але в узагальненій регресійній моделі, отриманій внаслідок використання теореми Айткена, він перетворюється в нуль [9, с. 155]. Нарешті, моделі без вільного члена з’являються, коли відомо, що лінія регресії обов’язково має проходити через фіксований вузол.

В статті [1] на прикладі лінійної множинної регресії без вільного члена з двома незалежними змінними запропоновано новий метод, суть якого полягає у модифікації методу найменших квадратів (МНК) шляхом приєднання обмеження-рівності нулю суми залишків.

Проте залишається без розгляду комплексне дослідження лінійної регресії, яка проходить через початок координат.

Постановка завдання. Мета даної роботи полягає у використанні аналога коефіцієнта детермінації множинної регресії для класичної регресійної моделі без вільного члена і побудові відповідних статистик Фішера і Ст’юдента для проведення економетричного аналізу.

Виклад основного матеріалу дослідження. Об’єктом вивчення є така модель множинної лінійної регресії

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + u, \tag{1}$$

де y та u – випадкові величини (u – збурення або залишок), $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ – невідомі детерміновані параметри.

Позначимо i -те спостереження залежної змінної y_i, а пояснюючих змінних – $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ik}$, де $i = \overline{1, n}$, n – обсяг вибірки. Тоді модель (1) набере такого виду:

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + u_i, \ i = \overline{1, n}. \qquad (2)$$

Систему n рівнянь запишемо у векторно-матричному вигляді:

$$Y = X\beta + u, \qquad (3)$$

де

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_k \end{pmatrix}, \ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Покладемо, що стосовно моделі (3) виконуються такі припущення.

Передумова 1. X – детермінована матриця, u – випадковий вектор.

Передумова 2. $M(u) = \mathrm{O}_n = (0, 0, \cdots, 0)'$, де M – математичне сподівання, штрих позначає операцію транспонування матриці.

Передумова 3. $M(uu') = \sigma^2 I_n$, де I_n – одинична матриця порядку n, σ – додатна стала, яка підлягає оцінюванню.

Передумова 4. u – нормально розподілений вектор з параметрами $M(u) = \mathrm{O}_n$, $D(u) = \sigma^2 I_n$.

Передумова 5. Ранг матриці X дорівнює $k < n$.

Модель (3), яка задовольняє передумови 1-5, називається класичною нормальною лінійною моделлю множинної регресії без вільного члена.

Оцінкою моделі (3) за вибіркою є векторно-матричне рівняння

$$Y = Xb + E, \qquad (4)$$

де $b = (b_1, b_2, \cdots, b_k)'$, $E = (e_1, e_2, \cdots, e_n)'$.

Детерміновану складову цієї моделі позначимо $\hat{Y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_n)'$, тобто

$$\hat{Y} = Xb. \qquad (5)$$

Тоді критерієм вибору вектора оцінок b згідно з методом найменших квадратів є мінімізація суми квадратів залишків:

$$Q(b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = E'E = (Y - Xb)'(Y - Xb) \to \min. \qquad (6)$$

Добуток $Y'Xb$ є скалярною величиною, тому він не змінюється від транспонування, з урахуванням чого умова (6) набуде такого вигляду:

$$Q(b) = Y'Y - 2b'X'Y + b'X'Xb \to \min. \qquad (7)$$

Використавши необхідну умову екстремуму функції k змінних, отримаємо систему нормальних рівнянь у матричній формі для визначення вектора b:

$$X'Xb = X'Y. \qquad (8)$$

Згідно з передумовою 5 $k \times k$ -матриця $X'X$ є невиродженою, тому розв'язком рівняння (8) є вектор

$$b = (X'X)^{-1} X'Y, \qquad (9)$$

де A^{-1} – обернена матриця до $k \times k$ -матриці A. Стосовно МНК-оцінки b невідомого вектора β справджується теорема Гаусса-Маркова, згідно з якою оцінки (9) мають найменшу дисперсію в класі лінійних незміщених оцінок.

Повернемося до функції $Q(b)$, яку з використанням (8) і (5) можна записати в такому вигляді:

$$E'E = Y'Y - b'X'Xb = Y'Y - \hat{Y}'\hat{Y} \tag{10}$$

або

$$E'E = Y'Y - b'X'Y\,. \tag{10*}$$

З (10) отримаємо співвідношення

$$Y'Y = \hat{Y}'\hat{Y} + E'E,$$

яке можна інтерпретувати як розклад суми квадратів залежної змінної на дві невід'ємні складові – суми квадратів значень залежної змінної, обумовлених регресією і залишкової суми квадратів, що характеризує вплив неврахованих факторів.

Введемо аналог коефіцієнта множинної детермінації, анонсований, зокрема, в роботі [2]:

$$R_o^2 = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y} = 1 - \frac{E'E}{Y'Y}, \tag{11}$$

де індекс вказує на те, що у вихідній моделі (1) вільний член дорівнює нулю. Оскільки $\hat{Y}'\hat{Y} \in [0; Y'Y]$, то $R_o^2 \in [0;1]$. Чим ближче R_o^2 до одиниці, тим краще регресія апроксимує емпіричні дані, тим тісніше спостереження «наближаються» до лінії регресії. Якщо $R_o^2 = 1$, то всі емпіричні точки лежать на лінії регресії і між y та $x_1, x_2, \cdots, x_k$ існує лінійна функціональна залежність.

Відмітимо, ще одну формулу для коефіцієнта детермінації, врахувавши (10*):

$$R_o^2 = \frac{b'X'Y}{Y'Y}. \tag{11*}$$

Розглянемо питання, чи впливає відсутність вільного члена у множинній лінійній регресії на статистики Ст'юдента і Фішера при дослідженні значущості коефіцієнтів регресії і рівняння регресії в цілому відповідно. При цьому використаємо схеми доведення основних тверджень, викладених в [10].

З'ясуємо закон розподілу випадкової величини $E'E$ (для нефіксованої вибірки). Враховуючи (4), (3) і (9), отримаємо:

$$\begin{aligned} E &= Y - Xb = X\beta + u - X\left[(X'X)^{-1}X'(X\beta + u)\right] = \\ &= u - X(X'X)^{-1}X'u = \left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]u = Ku, \end{aligned} \tag{12}$$

де K – симетрична ідемпотентна матриця така, що $K^2 = K$, власні значення її дорівнюють 0 або 1 і ранг дорівнює сліду trK – сумі діагональних елементів.

Знайдемо ранг матриці K, використавши властивість комутативності добутку матриць відносно операції обчислення сліду:

$$rangK = trI_n - tr\left[X(X'X)^{-1}X'\right] = n - tr(X'X)^{-1}X'X = n - trI_k = n - k. \tag{13}$$

З (12) отримаємо

$$E'E = u'K'Ku = u'Ku. \tag{14}$$

і $M(u'Ku) = \sigma^2 trK = (n-k)\sigma^2,$ врахувавши передумови 3, 4 і симетричність та ідемпотентність матриці K.

Тому незміщена оцінка дисперсії збурень має такий вид

$$S^2 = \frac{E'E}{n-k}. \tag{15}$$

Використавши заміну в квадратичній формі (14) $u = Pv$, де P – ортогональна $n \times n$-матриця ($P^{-1} = P'$), а також передумови 3 і 4, можна отримати рівність

$$u'Ku = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_{n-k}^2,$$

де $v_1, v_2, \cdots, v_{n-k}$ незалежні стандартні нормально розподілені випадкові величини. Тобто $\frac{E'E}{\sigma^2}$ – випадкова величини, розподілена за законом χ^2 з $n-k$ ступенями вільності.

Доведемо, що $E'E$ розподілена незалежно від b. Для цього достатньо показати, що розподіл випадкового вектора E не залежить від b. Розглянемо $n \times k$ -матрицю

$$M\left[E(b-\beta)'\right] = \begin{pmatrix} M\left[e_1(b_1-\beta_1)\right] & M\left[e_1(b_2-\beta_2)\right] & & M\left[e_1(b_k-\beta_k)\right] \\ M\left[e_2(b_1-\beta_1)\right] & M\left[e_2(b_2-\beta_2)\right] & \cdots & M\left[e_2(b_k-\beta_k)\right] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M\left[e_n(b_1-\beta_1)\right] & M\left[e_n(b_2-\beta_2)\right] & \cdots & M\left[e_n(b_k-\beta_k)\right] \end{pmatrix},$$

яка містить всі можливі коваріації між e_i та b_j, оскільки $M(E) = \mathrm{O}_n$ згідно з (12) і передумови 2. З (9) і (4) отримаємо рівність

$$b - \beta = (X'X)^{-1} X'u, \tag{16}$$

яка разом із (12), передумовами 1, 3 і властивістю математичного сподівання дозволяє отримати:

$$\begin{gathered} M\left[E(b-\beta)'\right] = M\left\{\left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]uu'X(X'X)^{-1}\right\} = \\ = \left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]M(uu')X(X'X)^{-1} = \left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]\sigma^2 I_n X(X'X)^{-1} = \\ = \sigma^2 X(X'X)^{-1} - \sigma^2 X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} = \\ = \sigma^2 X(X'X)^{-1} - \sigma^2 X(X'X)^{-1} = \mathrm{O}_{n,k}, \end{gathered} \tag{17}$$

тобто некорельованість e_i та b_j. Тут $\mathrm{O}_{n,k}$ – нульова $n \times k$ -матриця.

Враховуючи, що E та b розподілені за нормальним законом, можна зробити висновок, що вони є незалежними випадковими величинами.

Для перевірки статистичної гіпотези $H_o: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$ (незначущості коефіцієнта детермінації R_o^2) з'ясуємо закон розподілу чисельника у вигляді (11*). Згідно з H_o $\beta = \mathrm{O}_k$. Тоді з (16) і (3) отримаємо

$$b = (X'X)^{-1}X'u,\ b' = u'(X'X)^{-1},\ Y = u,\ b'X'Y = u'X(X'X)^{-1}X'u = u'K_1 u.$$

Симетрична матриця K_1 є ідемпотентною і за аналогією із дослідженням квадратичної форми (14) отримаємо рівність

$$b'X'Y = w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_k^2,$$

де $w_1, w_2, \cdots, w_k$ –незалежні стандартні нормально розподілені випадкові величини. Отже, випадкова величина $\frac{b'X'Y}{\sigma^2}$ розподілена за законом χ^2 з k ступенями вільності.

Враховуючи означення розподілу Фішера, у підсумку отримаємо наступний критерій: рівняння множинної регресії (3) значуще (гіпотеза H_o про рівність нулю відхиляється), якщо

$$F = \frac{b'X'Y / k}{E'E / (n-k)} = \frac{b'X'Y(n-k)}{E'Ek} > F(\alpha; k; n-k), \tag{18}$$

де $F(\alpha; k; n-k)$ – табличне значення F -критерія Фішера для рівня значущості α .

Виведемо формулу для скорегованого коефіцієнта детермінації, який враховує поправку на число ступенів вільності. Незміщені оцінки чисельника і знаменника в другій формулі (11) рівні

$\dfrac{E'E}{n-k}$ і $\dfrac{Y'Y}{n}$ відповідно. Тому скорегований коефіцієнт детермінації визначається наступним чином:

$$\overline{R_o^2} = 1 - \frac{E'E \,/\, (n-k)}{Y'Y \,/\, n} = 1 - \frac{n}{n-k}(1 - R_o^2). \tag{19}$$

Доцільно зробити застереження стосовно розглянутих коефіцієнтів R_o^2 і $\overline{R_o^2}$. Як і у випадку наявності вільного члена використання R_o^2 для вибору найкращого рівняння регресії може виявитися недостатнім. При цьому слід очікувати існування випадків, коли погано обумовлена модель регресії може дати порівняно високий коефіцієнт R_o^2. Мотивацією розгляду скорегованого множинного коефіцієнта детермінації $\overline{R_o^2}$ є недолік коефіцієнта R_o^2, який полягає в тому, що він, взагалі кажучи, збільшується при доповненні моделі новими пояснюючими змінними, хоча це не обов’язково означає покращення якості регресійної моделі.

Розглянемо питання про перевірку значущості коефіцієнтів регресії і знаходження для них довірчих інтервалів. Для цього спочатку з’ясуємо закон розподілу випадкових величин $b_i, i = \overline{1,k}$. З (16), передумов 1 і 2 слідує рівність $M(b) = \beta$. Коваріаційну або матрицю дисперсій оцінок $b_i, i = \overline{1,k}$, позначимо

$$\mathrm{var}(b) = M\left[(b - \beta)(b - \beta)'\right].$$

З (16), передумов 1, 3 і властивості математичного сподівання випливають рівності

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(b) &= M\left[(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}\right] = \\ &= (X'X)^{-1}X'M(uu')X(X'X)^{-1} = \sigma^2 (X'X)^{-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

З (16) і передумови 4 випливає, що b_i розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням β_i, а дисперсія згідно з (19) дорівнює $\sigma^2[(X'X)^{-1}]_{ii}$, де $[(X'X)^{-1}]_{ii}$ – i-тий елемент головної діагоналі матриці $(X'X)^{-1}$. Цей результат разом із незалежністю E та b згідно з (18) дозволяє використати t-розподіл Ст’юдента для перевірки гіпотез стосовно кожного із регресійних коефіцієнтів b_i. Випадкова величина b_i розподілена за нормальним законом з параметрами $M(b_i) = \beta_i$, $D(b_i) = \sigma^2[(X'X)^{-1}]_{ii}$.

Випадкова величина $\dfrac{E'E}{\sigma^2}$ має незалежний розподіл χ^2 з $n-k$ ступенями вільності. А тому згідно з означенням t-розподілу Ст’юдента величина

$$t = \frac{b_i - \beta_i}{\sqrt{E'E \,/\, (n-k)}\sqrt{[(X'X)^{-1}]_{ii}}} \tag{21}$$

задовольняє t-розподілу з $n-k$ ступенями вільності. Знаменник в (21) є середнім квадратичним відхиленням (стандартною помилкою) коефіцієнта регресії b_i і позначається S_{b_i}. Для перевірки деякої часткової статистичної гіпотези відносно β_i слід підставити у вираз (21) гіпотетичне значення β_i, і якщо отримане спостереження $t_{сп.}$ знаходиться всередині відповідної критичної області, то висунута гіпотеза відхиляється на заданому рівні значущості. Зокрема, для перевірки гіпотези $H_o: \beta_i = 0$, яка означає, що відсутня лінійна залежність Y від x_i, потрібно підставити в (21) $\beta_i = 0$. При цьому гіпотеза H_o відхиляється (β_i вважається значущим), якщо

$$|t| = \frac{|b_i|}{S_{b_i}} > t(1-\alpha; n-k),$$

де $t(1-\alpha; n-k)$ – табличне значення t -критерія Ст'юдента, визначене на рівні значущості α при числі ступенів вільності $n-k$.

Тому довірчий інтервал для параметра β_i має такий вид

$$b_i - t(1-\alpha; n-k)S_{b_i} \le \beta_i \le b_i + t(1-\alpha; n-k)S_{b_i} .$$

Числовий приклад. Проаналізуємо залежність кількості зареєстрованих в Україні злочинів від соціальних факторів за період з 2000-2013 роки. Для цього побудуємо лінійну багатофакторну регресійну модель, використовуючи дані з табл. 1. Залежною змінною є кількість зареєстрованих злочинів y, яка залежить від наступних факторів: загальна кількість населення України; забезпеченість населення житлом; кількість безробітних людей у віці 15-70 років; продаж алкогольних напоїв у розрахунку на душу населення.

Таблиця 1

Значення соціальних факторів за 2000-2013 рр.

Рік	Кількість зареєстрованих злочинів, тис. y	Кількість населення, млн осіб x_1	Забезпеченість житлом, м^2 на особу x_2	Кількість безробітних, млн осіб x_3	Продаж алкогольних напоїв, л на особу x_4
2000	567,80	49,43	20,7	2,656	1,4
2001	514,60	48,92	21,0	2,455	1,5
2002	460,39	48,46	21,3	2,141	1,6
2003	566,35	48,00	21,6	2,008	1,8
2004	527,81	47,62	21,8	1,907	2,2
2005	491,75	47,28	22,0	1,601	2,5
2006	428,15	46,93	22,2	1,515	2,7
2007	408,17	46,65	22,5	1,418	2,9
2008	390,16	46,37	22,8	1,425	3,2
2009	439,46	46,14	23,0	1,959	2,9
2010	505,37	45,96	23,3	1,714	2,8
2011	520,22	45,78	23,5	1,662	2,9
2012	447,15	45,64	23,7	1,590	2,9
2013	563,56	45,55	23,8	1,510	2,8

Джерело: складено авторами за джерелом [11]

Використавши (9), отримаємо емпіричну модель

$$y = -8,48x_1 + 56,72x_2 - 2,68x_3 - 154,66x_4.$$

Відповідно до моделі коефіцієнт детермінації та скорегований коефіцієнт детермінації дорівнюють: $R_o^2 = 0,994$, $\overline{R_o^2} = 0,992.$ Це свідчить про те, що зміни значення залежної змінної великою мірою пояснюється саме змінами вибраних факторів. За формулою (15) незміщена оцінка дисперсії збурень $S^2 = 1946,34$.

Знайдемо середні квадратичні відхилення коефіцієнтів регресії b_1 , b_2 , b_3 , b_4 :

$$S_{b_1} = S\sqrt{[(X'X)^{-1}]_{11}} = 7,4384 ; \quad S_{b_2} = S\sqrt{[(X'X)^{-1}]_{22}} = 19,7034 ;$$

$$S_{b_3} = S\sqrt{[(X'X)^{-1}]_{33}} = 71,083 ; \quad S_{b_4} = S\sqrt{[(X'X)^{-1}]_{44}} = 61,8168 .$$

Тоді спостережені значення критерію:

$$\frac{|b_1|}{S_{b_1}} = 1,141\,,\quad \frac{|b_2|}{S_{b_2}} = 2,878\,;\quad \frac{|b_3|}{S_{b_3}} = 0,038\,,\quad \frac{|b_4|}{S_{b_4}} = 2,502\,.$$

Значення t -критерія Ст'юдента, визначене на рівні значущості $\alpha = 0,05$ при числі ступенів вільності $n - k = 10$ становить $t_{кр.} = 2,228$.

Оскільки, $1,141 < t_{кр.}$, $2.878 > t_{кр.}$, $0.038 < t_{кр.}$ і $2.502 > t_{кр.}$, то на рівні значущості $\alpha = 0,05$ робимо висновок, що $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$, $b_3 = 0$ і $b_4 \neq 0$.

Відкинувши фактори, які відповідають незначущим коефіцієнтам, повторно проведемо розрахунки. Отримаємо кінцеву модель, яка містить два фактори:

$$y = 33,253x_2 - 104,958x_4.$$

Відповідно до моделі коефіцієнт детермінації та скорегований коефіцієнт детермінації дорівнюють: $R_o^2 = 0,993$, $\overline{R_o^2} = 0,992$. Це свідчить про те, що зміни значення залежної змінної великою мірою пояснюється саме змінами вибраних факторів.

В результаті обчислень отримали значення суми залишків 4,9841, незміщеної оцінки дисперсії збурень $S^2 = 1868,06$.

Знову перевіримо значущість коефіцієнтів регресії b_2, b_4.

Значення t -критерія Ст'юдента, визначене на рівні значущості $\alpha = 0,05$ при числі ступенів вільності $n - k = 12$ становить $t_{кр.} = 2,179$.

Оскільки, спостережені значення критерію

$$\frac{|b_2|}{S_{b_2}} = 12,844 > t_{кр.} \text{ і } \frac{|b_4|}{S_{b_4}} = 4,537 > t_{кр.},$$

то на рівні значущості $\alpha = 0,05$ робимо висновок, що $b_2 \neq 0$ і $b_4 \neq 0$.

Для параметрів регресії b_2, b_3 матимемо довірчі інтервали:

$$27,61 < \beta_2 < 38,89,\quad -155,36 < \beta_4 < -54,55\,.$$

Висновки з проведеного дослідження. Отримані результати свідчать, що введені визначення впливають на скорегований коефіцієнт множинної регресії і на *F*-статистику, але не змінюють стандартну помилку регресії, включаючи статистики Ст'юдента. Розлогий виклад доведень стосовно статистики Фішера мотивований тим, що в переважній частині навчальної літератури з економетрики фіксуються тільки остаточні результати. А тому дана робота буде корисна практикам і студентам. В цьому плані показовим є наступний висновок, зроблений в статті [2] про неспівпадання результатів, отриманих при використанні трьох комп'ютерних пакетів (Minitab, SPSS, Excel) при розв'язуванні однієї і тієї ж задачі.

Література

1. Малярець Л. М., Койбічук В. В. Регресійні моделі без вільного члена. *Бізнесінформ*. 2012. № 4. С. 21-25.

2. Eisenhauer J. G. Regression through the origin. *Teaching Statistics*. 2003. Vol. 25(3). P. 76-80.

3. Theil H. Principles of Econometrics. New York : John Wiley, 1971. 736 p.

4. Chambers R. L, Dunstan R. Estimating distribution functions from survey data. *Biometrika*. 1986. Vol. 73. Issue 3. P. 597-604.

5. Cassela G. Laverage and regression through the origin. *American Statistician*. 1983. Vol. 37(2). P. 147-152.

6. Gordon H. A. Errors in computer packages : least squares regression through the origin. *The Statistician*. 1981. Vol. 30(1). P. 23-29.

7. Turner M. E. Straight line regression through the origin. *Biometrics*. 1960. Vol. 16(3). P. 483-485.

8. Adelman M. A., Watkins G. C. Reserve asset values and the hotelling valuation principle: further evidence. *Souther Economic Journal*. 1994. Vol. 61(1). P. 664-673.

9. Кремер Н. Ш., Путко Б. А. Эконометрика : учебник для вузов, Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2006. 311 с.

10. Джонсон Дж. Эконометрические методы / пер. с англ. Москва : Статистика, 1980. 448 с.

11. Офіційний сайт Державної служби статистики України. URL: http://www.ukrstat.gov.ua (дата звернення: 05.01.2023).

References

1. Maliarets, L.M. and Koibichuk, V.V. (2012), "Regression models without a free term", *Biznesinform,* no. 4, pp. 21-25.

2. Eisenhauer, J.G. (2003), "Regression through the origin", *Teaching Statistics*, Vol. 25(3), pp. 76-80.

3. Theil, H. (1971), Principles of Econometrics, John Wiley, New York, USA, 736 p.

4. Chambers, R.L. and Dunstan, R. (1986), "Estimating distribution functions from survey data", *Biometrika*, Vol. 73, Issue 3, pp. 597-604.

5. Cassela, G. (1983), "Laverage and regression through the origin", *American Statistician*, Vol. 37(2), pp. 147-152.

6. Gordon, H.A. (1981), "Errors in computer packages : least squares regression through the origin", *The Statistician*, Vol. 30(1), pp. 23-29.

7. Turner, M.E. (1960), "Straight line regression through the origin", *Biometrics*, Vol. 16(3), pp. 483-485.

8. Adelman, M.A. and Watkins, G.C. (1994), "Reserve asset values and the hotelling valuation principle: further evidence", *Souther Economic Journal*, Vol. 61(1), pp. 664-673.

9. Kremer, N.Sh. and Putko, B.A. (2006), *Ekonometrika* [Econometrics], YuNITI-DANA, Moscow, Russia, 311 p.

10. Dzhonson, Dzh. (1980), *Ekonometricheskie metody* [Econometric Methods], Statistika, Moscow, Russia, 448 p.

11. "Official website of the State Statistics Service of Ukraine", available at: http://www.ukrstat.gov.ua (access date January 05, 2023).